UNIVERSITÄT PASSAU

Seminar:

Techniken der fraktalen Geometrie

Thema:

Dimensionseigenschaften und -berechnung

Markus Keidl

Prof. Dr. S. Graf

1 Einleitung

Das Arbeiten mit den verschiedenen Dimensionen, die im vorhergehenden Seminarvortrag vorgestellt wurden, wird erleichtert, wenn man verschiedene gemeinsame Eigenschaften findet. Auch spezifische Eigenschaften einzelner Dimensionen können für den Umgang mit ihnen wichtig sein.

Die Grundlage dieses Seminars bilden die Seiten 23-27 in [Fal97]. Dort werden grundlegende Eigenschaften von Dimensionen, sowie Möglichkeiten zur Berechnung von Dimensionen vorgestellt. Die folgenden beiden Abschnitte beschäftigen sich damit.

Sollten bei den Beweisen Sätze oder Propositionen zitiert werden, die im Rahmen dieses Seminars nicht vorgestellt werden, so wird gezielt auf Stellen verwiesen, an denen sie nachgelesen werden können. Zusätlich sind sie im Anhang (dort ohne Beweis) aufgeführt.

2 Grundlegende Dimensionseigenschaften

In späteren Vorträgen wird immer wieder auf verschiedene Eigenschaften von Dimensionen bezug genommen werden. Deshalb stellt dieser Abschnitt die wichtigsten Eigenschaften vor. *dim* bezeichnet dabei stets eine der bekannten Dimensionen, also Hausdorff-, Packungs-, untere oder obere Box-Dimension.

Monotonie: Für $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n, E_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$E_1 \subseteq E_2 \Rightarrow \dim E_1 \leq \dim E_2$$

Endliche Mengen: Für $E \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\#E < \infty \Rightarrow \dim E = 0$$

Offene Mengen: Ist $\emptyset \neq E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, so folgt:

$$\dim E = n$$

Glatte Mannigfaltigkeiten: Ist E eine glatte, m-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^n$, dann gilt:

$$\dim E = m$$

[*Die genaue Definition einer glatten Mannigfaltigkeit findet sich in Anhang A.*]

Zur Erinnerung:
Eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}^m$ wird *Lipschitz-Abbildung* genannt, wenn

$$\underset{c>0}{\exists} \ \underset{x,y \in X}{\forall} \ |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|.$$

Gilt sogar

$$\underset{x,y \in X}{\forall} \ c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c_2|x - y|.$$

für $0 < c_1 \leq c_2$, so nennt man f eine *Bi-Lipschitz-Abbildung.*

Lipschitz-Abbildungen: Ist $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, eine Lipschitz-Abbildung, dann gilt:

$$\dim f(E) \leq \dim E$$

Bi-Lipschitz Invarianz: Ist $f : E \to \mathbb{R}^m$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$, eine Bi-Lipschitz-Abbildung, so folgt:

$$\dim f(E) = \dim E$$

Geometrische Invarianz: Falls f eine Ähnlichkeittransformation oder affine Transformation ist, folgt (als Spezialfall der Bi-Lipschitz Invarianz):

$$\dim f(E) = \dim E$$

Für die Hausdorff-, sowie die Packungsdimension gilt weiterhin:

- Beide sind *endlich stabil*, d. h. für jede endliche Aufzählung von Mengen $\{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ gilt:

$$\dim \bigcup_{i=1}^{k} E_i = \max_{1 \leq i \leq k} \dim E_i$$

- Beide sind *abzählbar stabil*:

$$\dim \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \sup_{1 \leq i < \infty} \dim E_i$$

Insbesondere folgt, daß abzählbare Mengen Hausdorff- oder Packungsdimension Null haben.

Für die beiden Box-Dimensionen gilt:

$$\underline{\dim}_B E = \underline{\dim}_B \overline{E} \text{ und } \overline{\dim}_B E = \overline{\dim}_B \overline{E},$$

wobei $E \subseteq \mathbb{R}^n$.
Auch zwischen den einzelnen Dimensionsbegriffen besteht eine Beziehung:

$$\dim_H E \leq \dim_P E \leq \overline{\dim}_B E \text{ und } \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E. \tag{1}$$

Für die Ungleichungen, an denen die Box-Dimension beteiligt ist, wird angenommen, daß E beschränkt ist. Die Werte der meisten Dimensionen liegen zwischen denen der Hausdorff- und der oberen Box-Dimension. Falls man $\dim_H E = \overline{\dim}_B E$ zeigen kann, dann nehmen alle normalen Dimensionen diesen gemeinsamen Wert an.

3 Dimensionsberechnung

Im Normalfall will man die Dimensionen von Mengen abschätzen. Gewöhnlich ist es dabei schwieriger, eine untere als eine obere Abschätzung zu bestimmen. Auch wenn es viele verschiedene Methoden dazu gibt, beinhalten die meisten das Studium eines geeigneten Maßes, das von der untersuchten Menge getragen wird. Eine grundlegende und sehr hilfreiche Methode wird *Verteilungsprinzip* genannt.

Proposition 2.1 (Verteilungsprinzip)

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ und μ ein endliches Maß auf E mit $\mu(E) > 0$. Weiterhin seien $s \geq 0, c > 0$ und $\delta_0 > 0$ so gewählt, daß

$$\mu(U) \leq c|U|^s$$

für alle Mengen $U \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $|U| \leq \delta_0$. Dann folgt:

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} \text{ und } s \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E.$$

Beweis:

Sei $\{U_i\}$ eine beliebige δ_0-Überdeckung von E. Dann gilt:

$$\mu(E) \leq \mu(\bigcup_i U_i) \leq \sum_i \mu(U_i) \leq \sum_i c|U_i|^s \leq c \sum_i |U_i|^s$$

Es folgt:

$$\sum_i |U_i|^s \geq \frac{\mu(E)}{c}$$

Mit

$$M_\delta^s(E) := \left\{ \sum_i |U_i|^s \;\middle|\; \{U_i\} \text{ ist eine } \delta\text{-Überdeckung von E} \right\}$$

und $0 < \delta < \delta_0$ ist $\frac{\mu(E)}{c}$ damit eine untere Schranke von $M_\delta^s(E)$. Es folgt:

$$\frac{\mu(E)}{c} \leq \inf M_\delta^s(E) = \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

und

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c},$$

da $\delta \to \mathcal{H}_\delta^s(E))$ eine monoton fallende Funktion ist.
Da $\mu(E) > 0$ und $c > 0$ folgt:

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c} > 0.$$

Mit Definition der Hausdorff-Dimension und (1) folgt somit:

$$s \leq \dim_H E \leq \underline{\dim}_B E \leq \overline{\dim}_B E.$$

$\square$

Nun kann man sowohl Hausdorff- und Packungs-Maß, als auch entsprechende Dimensionen einer Menge E abschätzen, wenn man ein Maß μ findet, daß bestimmten „lokalen Dichtebedingungen“ auf E genügt.

Proposition 2.2

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Borelsche Menge, μ ein endliches Borelsches Maß auf dem $\mathbb{R}^n$ und $0 < c < \infty$.

(a) *Ist* $\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ *für alle* $x \in E$*, dann gilt:* $\mathcal{H}^s(E) \geq \frac{\mu(E)}{c}$.

(b) *Ist* $\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ *für alle* $x \in E$*, dann gilt:* $\mathcal{H}^s(E) \leq \frac{2^s \mu(E)}{c}$.

(c) *Ist* $\liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq c$ *für alle* $x \in E$*, dann gilt:* $\mathcal{P}^s(E) \geq \frac{2^s \mu(E)}{c}$.

(d) *Ist* $\liminf_{r \to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq c$ *für alle* $x \in E$*, dann gilt:* $\mathcal{P}^s(E) \leq \frac{2^s \mu(E)}{c}$.

Beweis:

(a) Sei $\beta \in \mathbb{R}^n$ mit $c < \beta < \infty$. Sei weiter $\delta > 0$ und

$$E_\delta = \{x \in E \mid \underset{0<r\leq\delta}{\forall} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq \beta\} \subseteq E.$$

Sei $\{U_i\}$ eine δ-Überdeckung von E und deshalb auch von E_δ. Für jedes U_i und alle $x \in U_i \cap E_\delta$ gilt:

$$U_i \subseteq B(x, |U_i|).$$

Mit der Definition von E_δ folgt:

$$\mu(U_i) \leq \mu(B(x, |U_i|)) \leq \beta |U_i|^s,$$

so daß

$$\mu(E_\delta) \leq \sum_{U_i \cap E_\delta \neq \emptyset} \mu(U_i) \leq \sum_{U_i \cap E_\delta \neq \emptyset} \beta |U_i|^s \leq \beta \sum_i |U_i|^s.$$

Da $\{U_i\}$ eine beliebige δ-Überdeckung von E ist, folgt:

$$\mu(E_\delta) \leq \beta \mathcal{H}^s_\delta(E) \leq \beta \mathcal{H}^s(E).$$

Weiter gilt: $\bigcup_{\delta>0} E_\delta = E$, und damit:

$$\mu(E) \leq \beta \mathcal{H}^s(E).$$

Da $\beta > c$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung. □

(b) Fallunterscheidung:

- E ist beschränkt: Sei nun $\beta \in \mathbb{R}$ mit $0 < \beta < c$ und $F \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge mit $E \subseteq F$. Für $x \in E$ und $n \in \mathbb{N}_1$ sei

$$\mathcal{B}_{x,n} := \{B(x,r) \mid 0 < r \leq \frac{1}{n}, B(x,r) \subseteq F \text{ und } \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \geq \beta\}.$$

Für ein $B(x,r) \in \mathcal{B}_{x,n}$ gilt:

$$\mu(B(x,r)) \geq \beta r^s = \beta\left(\frac{|B(x,r)|}{2}\right)^s = \frac{\beta}{2^s}|B(x,r)|^s.$$

Sei nun $\mathcal{V}_n = \bigcup_{x \in E} \mathcal{B}_{x,n}$. $\mathcal{V}_n$ ist damit eine Vitali-Überdeckung von E. Somit existiert nach dem Vitali-Überdeckungstheorem eine Folge $\{V_{n,i}\}_i$ disjunkter Mengen aus $\mathcal{V}_n$, so daß entweder

(i) $\sum_i |V_{n,i}|^s = \infty$ oder

(ii) $\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_i V_{n,i}) = 0.$

Da aber

$$\sum_i |V_{n,i}|^s \leq \sum_i \frac{2^s}{\beta}\mu(V_{n,i}) = \frac{2^s}{\beta}\mu(\bigcup_i V_{n,i}) \leq \frac{2^s}{\beta}\mu(F) \leq \frac{2^s}{\beta}\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$$

muß (ii) gelten. Man setzt nun $V = \bigcap_n \bigcup_i V_{n,i}$. Damit erhält man:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^s(E \setminus V) &= \mathcal{H}^s(E \setminus (\bigcap_n \bigcup_i V_{n,i})) \\ &= \mathcal{H}^s(\bigcup_n (E \setminus \bigcup_i V_{n,i})) \leq \sum_n \mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_i V_{n,i}) = 0.\end{aligned}$$

Da $E = (E \setminus V) \cup (E \cap V)$ schließt man

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \setminus V) + \mathcal{H}^s(E \cap V) = \mathcal{H}^s(E \cap V).$$

Aber für jedes $n \in \mathbb{N}_1$ ist $\{V_{n,i}\}_i$ eine $\frac{1}{n}$-Überdeckung von $E \cap V$ mit $\sum_i |V_{n,i}|^s \leq \frac{2^s}{\beta}\mu(F) < \infty$ und damit:

$$\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{H}^s(E \cap V) \leq \frac{2^s}{\beta}\mu(F).$$

Da aber F eine beliebige offene Obermenge von E war, ebenso wie $\beta > c$ beliebig war, folgt $\mathcal{H}^s(E) \leq \frac{2^s}{c}\mu(E)$.

- E ist nicht beschränkt: Angenommen $\mathcal{H}^s(E) > \frac{2^s}{c}\mu(E)$. Dann gibt es auch eine beschränkte Teilmenge von E deren $\mathcal{H}^s$-Maß diesen Wert ebenfalls überschreiten wird, im Widerspruch zum ersten Teil.

Die Punkte (c) und (d) können analog bewiesen werden. □

Da man eher an der Dimension einer Menge anstatt an ihrem Maß interessiert ist, folgt Proposition 2.2 weiter unten in einer Version für Dimensionen. Folgende Definition erweist sich dabei als hilfreich:

Definition (Lokale Dimension)

Die *untere bzw. obere lokale Dimension s von μ in $x \in \mathbb{R}^n$* (oft auch als *punktweise Dimension* oder *Hölder-Exponent* bezeichnet) ist definiert durch:

$$\underline{\dim}_{loc}\mu(x) = \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}$$

bzw.

$$\overline{\dim}_{loc}\mu(x) = \limsup_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r}.$$

Die lokale Dimension drückt das exponentielle Verhalten von $\mu(B(x,r))$ für kleine r aus. Man beachte, daß $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) = \overline{\dim}_{loc}\mu(x) = \infty$, falls $\mu(B(x,r)) = 0$ für ein $r > 0$.

Proposition 2.3

Sei $E \subseteq \mathbb{R}$ eine Borelsche Menge und μ ein endliches Borelsches Maß auf dem $\mathbb{R}^n$.

(a) *Ist* $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geq s$ *für alle* $x \in E$ *und* $\mu(E) > 0$*, dann folgt:* $\dim_H E \geq s$.

(b) *Ist* $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \leq s$ *für alle* $x \in E$*, dann folgt:* $\dim_H E \leq s$.

(c) *Ist* $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \geq s$ *für alle* $x \in E$ *und* $\mu(E) > 0$*, dann folgt:* $\dim_P E \geq s$.

(d) *Ist* $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \leq s$ *für alle* $x \in E$*, dann folgt:* $\dim_P E \leq s$.

Beweis:

(a) Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geq s \\
\Rightarrow & \underset{x\in E}{\forall} \liminf_{r\to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq s \\
\Rightarrow & \underset{x\in E}{\forall} \underset{0<\beta<s}{\forall} \underset{1>r_x>0}{\exists} \left(0 < r \leq r_x \Longrightarrow \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq \beta\right) \\
\Rightarrow & \underset{x\in E}{\forall} \underset{0<\beta<s}{\forall} \underset{1>r_x>0}{\exists} \left(0 < r \leq r_x \Longrightarrow \mu(B(x,r)) \leq r^\beta\right) \\
\Rightarrow & \underset{x\in E}{\forall} \underset{0<\beta<s}{\forall} \underset{1>r_x>0}{\exists} \left(0 < r \leq r_x \Longrightarrow \frac{\mu(B(x,r))}{r^\beta} \leq 1\right) \\
\Rightarrow & \underset{x\in E}{\forall} \limsup_{r\to 0} \frac{\mu(B(x,r))}{r^s} \leq 1
\end{aligned}$$

Mit Proposition 2.2(a) folgt damit:

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \mu(E) > 0.$$

Mit der Definition der Hausdorff-Dimension ergibt sich, daß $\dim_H E \geq s$.

Auf analoge Weise kann man die Behauptungen (b), (c) und (d) beweisen. $\square$

Man beachte, daß es in den Teilen (a) und (c) von Proposition 2.3 ausreicht, wenn die Voraussetzung für alle x aus einer Teilmenge von E mit positivem μ-Maß gültig ist.

Die folgende teilweise Umformung der vorhergehenden Ergebnisse zeigt, daß eine Menge mit gegebener Dimension ein Maß mit entsprechender lokaler Dimension trägt.

Proposition 2.4

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nicht-leere Borelsche Menge.

(a) *Ist* $\dim_H E > s$, *dann existiert ein* μ *mit* $0 < \mu(E) < \infty$ *und* $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \geq s$ *für alle* $x \in E$.

(b) *Ist* $\dim_H E < s$, *dann existiert ein* μ *mit* $0 < \mu(\overline{E}) < \infty$ *und* $\underline{\dim}_{loc}\mu(x) \leq s$ *für alle* $x \in E$.

(c) *Ist* $\dim_P E > s$, *dann existiert ein* μ *mit* $0 < \mu(E) < \infty$ *und* $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \geq s$ *für* μ*-fast alle* $x \in E$.

(d) *Ist* $\dim_P E < s$, *dann existiert ein* μ *mit* $0 < \mu(\overline{E}) < \infty$ *und* $\overline{\dim}_{loc}\mu(x) \leq s$ *für alle* $x \in E$.

Beweis:

(a) Sei also $\dim_H E > s$. Nach der Definition der Hausdorff-Dimension folgt damit, daß $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ ist. Theorem 4.10 [Fal90] liefert eine kompakte Teilmenge $G \subseteq E$, so daß

$$0 < \mathcal{H}^s(G) < \infty.$$

Mit Proposition 4.11 [Fal90] erhält man nun wiederum eine kompakte Teilmenge $K \subseteq G$ mit $\mathcal{H}^s(K) > 0$ und ein $b > 0$ mit:

$$\underset{x \in \mathbb{R}^n}{\forall} \; \underset{r \geq 0}{\forall} \; \mathcal{H}^s(K \cap B(x,r)) \leq br^s.$$

Setzt man jetzt $\mu := \mathcal{H}^s_{|K}$, so folgt für alle Borelschen Mengen $B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\mu(B) = \mathcal{H}^s(K \cap B).$$

Damit folgt für E:

$$\mu(E) = \mathcal{H}^s(K \cap E) = \mathcal{H}^s(K) \Longrightarrow 0 < \mu(E) < \infty.$$

Weiter gilt nun für $x \in E$:

$$\begin{aligned}
& \underset{1>r>0}{\forall} \; \mu(B(x,r)) = \mathcal{H}^s(K \cap B(x,r)) \leq br^s \\
\Rightarrow & \underset{1>r>0}{\forall} \; \log \mu(B(x,r)) \leq \log b + s \log r \\
\Rightarrow & \underset{1>r>0}{\forall} \; \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq \frac{\log b}{logr} + s \\
\Rightarrow & \liminf_{r \to 0} \frac{\log \mu(B(x,r))}{\log r} \geq s \\
\Rightarrow & \underline{\dim}_{loc} \mu(x) \geq s.
\end{aligned}$$

Dabei gilt für $x \in (E \setminus K)$ und r klein genug: $K \cap B(x,r) = \emptyset$. Und damit:

$$\mu(B(x,r)) = \mathcal{H}^s(\emptyset) = 0.$$

Für diesen Fall sei $\log 0 := -\infty$. Insgesamt ist damit (a) bewiesen.

Die Teile (b), (c) und (d) können analog bewiesen werden. □

In den Propositionen 2.3 und 2.4 ist erkennbar, daß die untere lokale Dimension sich auf die Hausdorff-, die obere lokale Dimension sich auf die Packungs-Dimension einer Menge bezieht.

Die Propositionen 2.3(a) und 2.4(a) können zusammengefaßt werden, um mögliche theoretische Kriterien zu erhalten, die oft nützlich sind, wenn man Hausdorff-Dimensionen und -Maße berechnen will.

Definition (s-Energie)

Für $s \geq 0$ heißt

$$I_s(\mu) = \int \int |x-y|^{-s} \, d\mu(x) d\mu(y)$$

die *s-Energie eines Maßes* μ *auf dem* $\mathbb{R}^n$.

Proposition 2.5

Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

(a) *Existiert ein endliches Maß* μ *auf* E *mit* $I_s(\mu) < \infty$, *dann gilt:* $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ *und* $\dim_H E \geq s$.

(b) *Ist* E *eine Borelsche Menge mit* $\mathcal{H}^s(E) > 0$, *dann existiert ein endliches Maß* μ *auf* E *mit* $I_t(\mu) < \infty$ *für alle* $t < s$.

Beweis:

(a) Angenommen $I_s(\mu) < \infty$ für ein beliebiges endliches Maß μ, dessen Support in E enthalten ist. Sei

$$E_1 = \{x \in E \mid \limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B_r(x))}{r^s} > 0\}.$$

Ist $x \in E_1$, so existiert ein $\epsilon > 0$ und eine Nullfolge von Zahlen $\{r_i\}$, derart daß

$$\frac{\mu(B(x, r_i))}{r_i^s} \geq \epsilon.$$

für alle r_i aus $\{r_i\}$.
Ist $\mu(\{x\}) > 0$, so ist klar, daß $I_s(\mu) = \infty$ folgt. Sei also $\mu(\{x\}) = 0$. Aus der Stetigkeit von μ folgt, daß $\mu(A_i) \geq \frac{1}{4}\epsilon r_i^s$ $(i = 1, 2, \ldots)$, wobei A_i der Ring $B(x, r_i) \setminus B(x, q_i)$ um x und $0 < q_i < r_i$, mit q_i klein genug, ist. Nachdem man, wenn nötig, eine Teilfolge ausgewählt hat, kann man annehmen, daß $r_{i+1} < q_i$ für alle i ist, so daß alle A_i disjunkt kreisförmig zentriert um x sind. Für $x \in E_1$ gilt deshalb:

$$\Phi_s(x) = \int |x - y|^{-s}\, d\mu(y) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{A_i} |x - y|^{-s}\, d\mu(y) \geq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4}\epsilon r_i^s r_i^{-s} = \infty$$

da $|x - y|^{-s} \geq r_i^{-s}$ in A_i. Da aber

$$I_s(\mu) = \int \Phi_s(x)\, d\mu(x) < \infty,$$

folgt: $\Phi_s(x) < \infty$ für μ-fast alle x. Man schließt, daß $\mu(E_1) = 0$. Da

$$\limsup_{r \to 0} \frac{\mu(B(x, r))}{r^s} = 0, \text{ falls } x \in E \setminus E_1,$$

folgt mit Proposition 2.2(a) für alle $c > 0$:

$$\mathcal{H}^s(E) \geq \mathcal{H}^s(E \setminus E_1) \geq \frac{\mu(E \setminus E_1)}{c} \geq \frac{(\mu(E) - \mu(E_1))}{c} = \frac{\mu(E)}{c},$$

und damit $\mathcal{H}^s(E) = \infty$.

(b) Angenommen $\mathcal{H}^s(E) > 0$. $\mathcal{H}^s$ wird nun benutzt, um ein endliches Maß μ auf E mit $I_t(\mu) < \infty$ für jedes $t < s$ zu konstruieren.
Nach Korollar 4.12 aus [Fal90] existiert eine kompakte Menge $H \subseteq E$ mit $0 < \mathcal{H}^s(H) < \infty$ und

$$\mathcal{H}^s(H \cap B(x, r)) \leq br^s$$

für $x \in \mathbb{R}^n$, $r \geq 0$ und ein konstantes b. Sei μ die Einschränkung von $\mathcal{H}^s$ auf H, so daß $\mu(A) = \mathcal{H}^s(H \cap A)$. Dann ist μ ein endliches Maß auf E. Falls nun $0 \leq t < s$, gilt:

$$\begin{aligned}
\Phi_t(x) &= \int |x-y|^{-t}\, d\mu(y) \\
&= \int\limits_{|x-y|\leq 1} |x-y|^{-t}\, d\mu(y) + \int\limits_{|x-y|>1} |x-y|^{-t}\, d\mu(y) \\
&\leq \int\limits_{\mathbb{R}_+} \mu(\{y \mid (|x-y| \leq 1) \wedge (|x-y|^{-t} \geq r)\})\, dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= \int\limits_{[0;1]} \mu(\{y \mid |x-y| \leq 1\})\, dr + \int\limits_{]1;+\infty[} \mu(\{y \mid |x-y| \leq r^{-t}\})\, dr + \mu(\mathbb{R}^n) \\
&= \mu(\mathbb{R}^n) + \mu(B(x,1)) + \int\limits_0^1 t\mu(\{y \mid |x-y| \leq \eta\})\eta^{-t-1}\, d\eta \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^n) + \mu(B(x,1)) + \int\limits_0^1 tb\eta^{s-t-1}\, d\eta \\
&\leq \mu(\mathbb{R}^n) + b + bt\int\limits_0^1 \eta^{s-t-1}\, d\eta \\
&= b(1 + \frac{t}{x-t}) + \mathcal{H}^s(E).
\end{aligned}$$

nach partieller Integration und mit 4.14 [Fal90]. Somit liefert $\Phi_t(x) \leq c$, daß $I_r(\mu) = \int \Phi_t(x)\, d\mu(x) \leq c\mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. $\square$

A Mannigfaltigkeiten

Definition (Mannigfaltigkeit)

Eine **n-dimensionale (topologische) Mannigfaltigkeit** $\mathcal{M}^n$ ist ein Hausdorff-Raum mit abzählbarer Basis der Topologie, der **lokal endlich** ist. Dies bedeutet, daß es zu jedem Punkt $p \in \mathcal{M}$ eine offene Umgebung U von p und einen Homöomorphismus

$$h : U \to U'$$

mit einer offenen Menge $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ gibt. Ein solcher Homöomorphismus (h, U) heißt **Karte** oder **lokales Koordinatensystem** von $\mathcal{M}$ um p mit dem **Kartengebiet** U.

Definition (Hausdorff-Raum)

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn verschiedene Punkte von X stets disjunkte Umgebungen besitzen.

Definition (Topologischer Raum)

Ein **topologischer Raum X** besteht aus einer Menge, genannt X, zusammen mit einer Topologie auf dieser Menge. Eine **Topologie** ist eine Menge $\mathcal{O}$ von Teilmengen von X. Diese heißen offen in X. Über sie wird folgendes gefordert:

(a) Der ganze Raum X und $\emptyset$ sind offen.

(b) Sind $U_1, \ldots, U_k$ offen, so auch $U_1 \cap \cdots \cap U_k$.

(c) Sind die Teilmengen $U_i, i \in I$, offen in X, so auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i \in I} U_i$.

Eine Menge $\mathcal{B}$ offener Mengen von X heißt **Basis** der Topologie von X, wenn jede offene Menge von X eine Vereinigung von Mengen aus $\mathcal{B}$ ist.

Definition (Homöomorphismus)

Eine Abbildung $f : X \to Y$ zwischen zwei topologischen Räumen X und Y heißt Homöomorphismus, wenn f bijektiv ist, und f sowie f^{-1} stetig sind.

Definition (Atlas)

Eine Menge $\{(h_i, U_i) | i \in I\}$ von Karten heißt **Atlas** einer Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$, wenn $(U_i | i \in I)$ eine Überdeckung von $\mathcal{M}$ ist.

Seien (h_i, U_i) und (h_k, U_k) Karten von $\mathcal{M}$, dann ist auf $h_i(U_i \cap U_k)$ die Abbildung

$$h_{ik} := h_k \circ h_i^{-1} : h_i(U_i \cap U_k) \to h_k(U_i \cap U_k)$$

definiert. Sie heißt **Kartenwechsel** zwischen h_i und h_k.
Ein Atlas heißt **differenzierbar**, wenn alle seine Kartenwechsel beliebig oft differenzierbar sind.

Definition (Differenzierbare Mannigfaltigkeit)

Eine **differenzierbare Struktur** auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathcal{M}$ ist ein maximal differenzierbarer Atlas $\mathcal{D}$ auf $\mathcal{M}$. Eine **n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit** ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einer differenzierbaren Struktur für diese Mannigfaltigkeit.
Eine beliebig oft differenzierbare Mannigfaltigkeit wird auch **glatte Mannigfaltigkeit** genannt.

B Verschiedene Hilfssätze

Theorem 1.10 (Vitali-Überdeckungstheorem) [Fal85]

(a) Sei E eine $\mathcal{H}^s$-meßbare Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{V}$ eine Vitali-Klasse von abgeschlossenen Mengen für E. Dann gibt es eine (endliche oder abzählbare) disjunkte Folge $\{U_i\}$ aus $\mathcal{V}$, so daß entweder

$$\sum_i |U_i|^s = \infty$$

oder

$$\mathcal{H}^s(E \setminus \bigcup_i U_i) = 0.$$

(b) Ist $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, dann kann man mit $\epsilon > 0$ zusätzlich fordern, daß

$$\mathcal{H}^s(E) \leq \sum_i |U_i|^s + \epsilon.$$

Eine Menge von Mengen $\mathcal{V}$ wird *Vitali-Klasse für E* genannt, wenn für jedes $x \in E$ und für alle $\delta > 0$ ein $U \in \mathcal{V}$ mit $x \in U$ und $0 < |U| \leq \delta$ existiert.

Theorem 4.10 [Fal90]

Sei E eine Borelsche Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ mit $\mathcal{H}^s(E) = \infty$. Dann gibt es eine kompakte Teilmenge $K \subseteq E$ derart, daß $0 < \mathcal{H}^s(K) < \infty$.

Proposition 4.11 [Fal90]

Sei E eine Borelsche Menge mit $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$. Dann gibt es eine Konstante b und eine kompakte Menge $K \subseteq E$ mit $\mathcal{H}^s(K) > 0$, so daß

$$\mathcal{H}^s(K \cap B(x,r)) \leq br^s$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$.

Literatur

[Brö92a] Bröcker, Theodor: *Analysis I*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1992

[Brö92b] Bröcker, Theodor: *Analysis II*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1992

[Brö92c] Bröcker, Theodor: *Analysis III*. Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich: BI-Wissenschaftsverlag, 1992

[Cut86] Cutler, C. D.: The Hausdorff dimension distribution of finite measures in Euclidean space. Erschienen in: *Canadian Journal of Mathematics* 38 (1986), Nr. 2, S. 1459–1484

[Cut90] Cutler, C. D.: Connecting ergodicity and dimension in dynamical systems. Erschienen in: *Ergodic Theory and Dynamical Systems* 10 (1990), S. 451–462

[Cut95] Cutler, C. D.: Strong and weak duality principles for fractal dimension in Euclidean space. Erschienen in: *Mathematical proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 118 (1995), S. 3930–410

[Edg90] Edgar, Gerald A.: *Measure, Topology and Fractal Geometry*. New York: Springer Verlag, 1990

[Fal85] Falconer, K.: *The geometry of fractal sets*. Cambridge: Cambridge University Press, 1985

[Fal90] Falconer, K.: *Fractal Geometry*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1990

[Fal93] Falconer, K.: *Fraktale Geometrie*. Heidelberg and Berlin and Oxford: Spektrum Akademischer Verlag, 1993

[Fal97] Falconer, K.: *Techniques in Fractal Geometry*. Chichester, UK: John Wiley & Sons, 1997

[Mat95] Mattila, P.: *Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1995